PREMIÈRE ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES APPLIQUÉES

GÉOMÉTRIE

DURÉE : 3 heures. – COEFFICIENT : 4

La qualité de la rédaction et de la présentation, la clarté et la précision des raisonnements constitueront un élément important pour l'appréciation des copies.

L'usage des instruments de calcul est autorisé.

Cette épreuve nécessite l'utilisation de feuilles de papier millimétré.

L'espace est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, les coordonnées étant notées x, y, z. Dans tout le problème, a est un nombre réel strictement positif donné. Pour les représentations graphiques, on prendra $a = 8$ et on choisira 1 cm pour unité de longueur.

I. ÉTUDE DE DEUX COURBES DE L'ESPACE

Pour tout élément φ de $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, on considère les points P et Q de coordonnées respectives $(a \sin\varphi, 0, a\cos^2\varphi)$ et $(0, a\cos\varphi, a\cos^2\varphi)$. Soient HPRQ le rectangle dont le plan est parallèle à $(O; \vec{i}, \vec{j})$ et tel que H soit sur $(O; \vec{k})$, et O*prq* sa projection orthogonale sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Déterminer la nature des arcs décrits par P, Q et *r* lorsque φ parcourt $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Placer sur une figure à main levée les points et les arcs précédemment définis, et indiquer une signification du paramètre φ.

2. Soit M la projection orthogonale de H sur PQ et Γ_1 l'arc décrit par M lorsque φ parcourt $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
On note P_0 le point $(0, 0, a)$.
   a. Calculer les coordonnées de M en fonction de φ.
   b. Montrer que Γ_1 est situé sur la sphère de diamètre OP_0.
   c. Déterminer l'équation polaire de la projection orthogonale γ_1 de Γ_1 sur $(O; \vec{i}, \vec{j})$, le pôle étant O et l'axe polaire $(O; \vec{i})$.
   d. Montrer que Γ_1 admet un axe de symétrie.

3. Soient N la projection orthogonale de R sur PQ et Γ_2 la courbe décrite par N lorsque φ parcourt $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.
   a. Calculer les coordonnées de N en fonction de φ;
   b. Montrer que Γ_2 est située sur un hyperboloïde de révolution d'axe $(O; \vec{k})$ que l'on précisera;
   c. Montrer que la droite *pq* est tangente à la projection orthogonale γ_2 de Γ_2 sur $(O; \vec{i}, \vec{j})$;
   d. Prouver que les tangentes à Γ_2 font un angle constant avec la direction $\vec{k}$;
   e. Calculer la longueur de la courbe Γ_2.

II. ÉTUDE D'UNE SURFACE ENGENDRÉE PAR UNE FAMILLE DE CERCLES

Soit Σ la surface engendrée par le cercle C_φ de diamètre HP et dont le plan est parallèle à $(O; \vec{i}, \vec{j})$, lorsque φ parcourt $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

1. *a.* Montrer que Σ admet la représentation paramétrique : $x = a \sin\varphi \cos^2\theta$; $y = a \sin\varphi \cos\theta \sin\theta$; $z = a\cos^2\varphi$
où (φ, θ) parcourt $\left[0, \frac{\pi}{2}\right] \times \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$.

Tournez la page S.V.P.

b. On note L_θ la courbe coordonnée de Σ correspondant à un élément θ donné de $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$. Déterminer $L_{\frac{\pi}{2}}$ et $L_{-\frac{\pi}{2}}$ ainsi que L_0.

Montrer que, si θ appartient à $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$, L_θ est la projection orthogonale de L_0 sur le plan d'équation $y \cos\theta - x \sin\theta = 0$. On obtient ainsi un nouveau mode de génération de Σ.

2. *a.* Cette surface paramétrée Σ comporte-t-elle des points singuliers ?
En dehors de ces points éventuels, déterminer l'équation du plan tangent à Σ.

b. Déterminer l'ensemble C constitué des points de Σ où le plan tangent est parallèle à $(O; \vec{i})$: on prouvera que C est la réunion de deux courbes L_θ que l'on précisera et on déterminera la projection orthogonale γ' de C sur le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$.

c. Montrer, que le long d'un cercle C_φ donné, la normale à Σ rencontre une droite fixe que l'on précisera et le plan tangent à Σ passe par un point fixe.

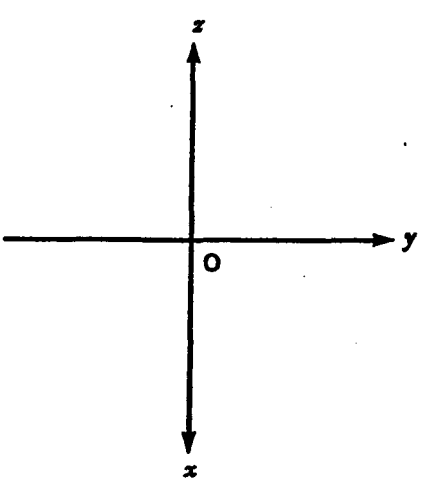
3. *a.* Montrer que la courbe Γ_1 est située sur Σ et préciser la relation entre θ et φ qui la caractérise.

b. On considère la courbe Γ_2 tracée sur Σ définie par la relation $\theta = \frac{\pi}{2} - \varphi$. Montrer que Γ_2 est située sur un cône de révolution d'axe $(O; \vec{k})$ que l'on précisera. Déterminer une équation polaire de la projection orthogonale γ_2 de Γ_2 sur le plan $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

c. Montrer que les projections orthogonales γ_1' et γ_2' de Γ_1 et Γ_2 sur le plan $(O; \vec{j}, \vec{k})$ sont égales.

d. Déterminer le point d'intersection I de Γ_1 et Γ_2 autre que P_0. Expliquer pourquoi γ_1' est tangente à γ' au point i' projection de I sur $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

4. Placer sur une même figure, comme il est indiqué ci-contre, les projections orthogonales de C, Γ_1 et Γ_2 sur les plans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et $(O; \vec{j}, \vec{k})$, ainsi que les projections des cercles C_φ, pour les valeurs $\frac{\pi}{4}$ et $\frac{\pi}{2}$ de φ.



5. Déterminer les lignes de plus grande pente de Σ, c'est-à-dire les courbes tracées sur Σ orthogonales aux lignes de niveau de cote z constante.

6. Soit Δ l'ensemble des points de l'espace appartenant aux disques D_φ limités par les cercles C_φ, où φ parcourt $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

a. Calculer le volume de Δ.

b. Déterminer le centre d'inertie G de Δ, supposé homogène.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail